| 머리말 |

"어떻게 하면 수학을 잘 할 수 있나요?"

학생들로부터 가장 많이 받는 질문입니다.
수학 공부를 할 때 꼭 염두에 두어야 할 세 가지를 짚어보면서 질문에 답해 보겠습니다.

첫째, 수학은 **언어**입니다.
어느 낯선 문명의 말과 글을 듣고 볼 때 낯설고 어색하여 답답함을 느끼듯이 수학도 처음에는 어색하고 답답한 수식들의 세계처럼 느껴집니다.
이때 필요한 것은 **틀릴 것을 두려워하지 않는 용기**입니다.

수학에 등장하는 정의, 성질, 법칙들은 수학의 세계에서 통용되는 기본단어, 숙어, 관용구와도 같기 때문에 그대로 써 보고, 그대로 읽어 보고, 또 쓰고, 또 읽고, … 남에게 말 할 수 있을 때까지 해야 합니다.

둘째, 수학은 **문제풀이를 통해서 이해하는 학문**입니다.
한마디로 문제를 풀어 봐야 개념이 완벽해진다는 말입니다.
이때 필요한 것은 **인내심이며 충분한 시간**입니다.

처음에는 쉬운 문제부터 시작하기 바랍니다. 처음부터 지나치게 어려운 문제에 매달리다 보면 개념의 흐름을 놓치고 자꾸만 자괴감에 휩싸이게 됩니다. 문제를 풀고 나서 반드시 개념을 다시 읽고 써 보기 바랍니다.
즉, 확신이 생기고 자신감이 생길 때까지 해야 합니다.

셋째, 수학은 **시행착오를 거치면서 터득되는 학문**입니다.
개념에 대한 단편적인 이해를 넘어 그 적용 단계에 이르면 자신에게 숨어 있던 허점들이 나타나게 됩니다.
그 허점을 극복해 나가는 과정이 수학 실력이 느는 과정입니다.
이때 필요한 것은 **냉혹하고 집요한 반성**입니다.

반드시 자신의 풀이를 되돌아보고, 왜 틀렸는지, 틀리지 않기 위해서는 무엇을 염두에 두어야 하는지 꼼꼼하게 정리해 봐야 합니다. 자기가 틀린 이유를 설명할 수 있을 때까지 해야 합니다.

이 책을 통해서 수학을 접할 여러분을 그려봅니다.
공부하는 즐거움보다 점수가 주는 위압감이 더 앞서는 시대…
그러나 위의 세 가지 사항을 명심하고 나아간다면 여러분의 수학 실력은 나날이 발전해 갈 것이라고 확신합니다.
여러분 모두의 건투를 빕니다.

– 한석만 –

수학의 원리 미리보기

• 단원을 세분화하고 꼭 필요한 내용을 수록하였습니다.
• 고등학교 학생들이 반드시 알아야 할 개념들을 개정교육과정에 맞춰 사전식으로 정리하여 쉽게 이해할 수 있도록 구성하였습니다.

01 지수

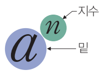
같은 수를 여러 번 곱할 때, 곱하는 수와 곱해진 개수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$3\times3=3^2$ ← 3의 제곱
$3\times3\times3=3^3$ ← 3의 3제곱
$3\times3\times3\times3=3^4$ ← 3의 4제곱
……

일반적으로 임의의 수 a와 자연수 n에 대하여 a를 n번 거듭하여 곱한 것을 **a의 n제곱**이라 하고, 기호로 **a^n**과 같이 나타낸다. 즉,

$$a^2=a\times a,\ a^3=a\times a\times a,\ a^4=a\times a\times a\times a,\ \cdots$$

이다. 이때 a^2, a^3, a^4, $\cdots$, a^n, $\cdots$ 을 통틀어 **a의 거듭제곱**이라 하고 a^n에서 a를 거듭제곱의 **밑**, n을 거듭제곱의 **지수**라 한다.



또한, 지수는 곱하는 횟수를 나타내므로 다음과 같은 거듭제곱의 계산이 가능하다. (단, $a\neq0$)

$$a^2\times a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)=a^5 \qquad (a^2)^3=(a\times a)\times(a\times a)\times(a\times a)=a^6$$

$$a^5\div a^3=\frac{a\times a\times a\times a\times a}{a\times a\times a}=a^2 \qquad a^3\div a^5=\frac{a\times a\times a}{a\times a\times a\times a\times a}=\frac{1}{a^2}$$

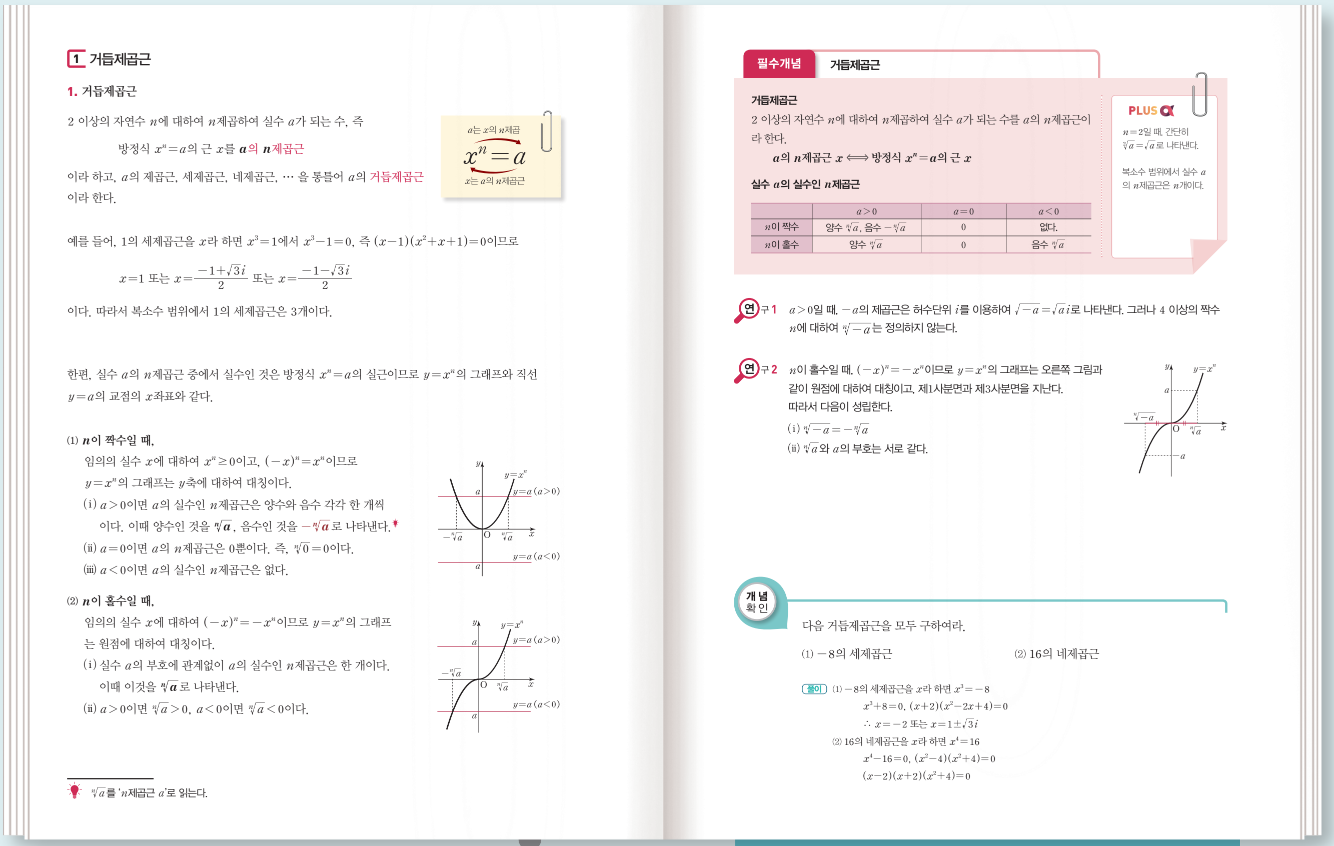
이와 같이 임의의 수 a, b와 자연수 m, n에 대하여 다음의 지수법칙이 성립한다.

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$
(2) $(a^m)^n=a^{mn}$
(3) $(ab)^n=a^nb^n$
(4) $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$ (단, $a\neq0$)
(5) $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m<n)\end{cases}$ (단, $a\neq0$)

01

단원 들어가기

본문 내용을 학습하기에 앞서 이전에 배운 내용 또는 이 단원에서 배우는 학습 내용에 대한 기초가 되는 지식을 정리하여 개념을 더욱 쉽게 이해할 수 있도록 하였습니다.



1 거듭제곱근

1. 거듭제곱근

2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉

방정식 $x^n=a$의 근 x를 $\boldsymbol{a}$의 $\boldsymbol{n}$제곱근

이라 하고, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, … 을 통틀어 a의 거듭제곱근이라 한다.

a는 x의 n제곱
$x^n=a$
x는 a의 n제곱근

예를 들어, 1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$$x=1 \text{ 또는 } x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ 또는 } x=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

이다. 따라서 복소수 범위에서 1의 세제곱근은 3개이다.

한편, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

(1) **n이 짝수일 때,**
임의의 실수 x에 대하여 $x^n\geq 0$이고, $(-x)^n=x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
(ⅰ) $a>0$이면 a의 실수인 n제곱근은 양수와 음수 각각 한 개씩이다. 이때 양수인 것을 $\sqrt[n]{a}$, 음수인 것을 $-\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.
(ⅱ) $a=0$이면 a의 n제곱근은 0뿐이다. 즉, $\sqrt[n]{0}=0$이다.
(ⅲ) $a<0$이면 a의 실수인 n제곱근은 없다.

$y=x^n$, $y=a\,(a>0)$, $y=a\,(a<0)$, $-\sqrt[n]{a}$, O, $\sqrt[n]{a}$

(2) **n이 홀수일 때,**
임의의 실수 x에 대하여 $(-x)^n=-x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
(ⅰ) 실수 a의 부호에 관계없이 a의 실수인 n제곱근은 한 개이다. 이때 이것을 $\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.
(ⅱ) $a>0$이면 $\sqrt[n]{a}>0$, $a<0$이면 $\sqrt[n]{a}<0$이다.

$y=x^n$, $y=a\,(a>0)$, $y=a\,(a<0)$, $-\sqrt[n]{a}$, O, $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{a}$를 'n제곱근 a'로 읽는다.

필수개념 거듭제곱근

거듭제곱근
2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수를 a의 n제곱근이라 한다.
$\boldsymbol{a}$**의** $\boldsymbol{n}$**제곱근** $\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow$ **방정식** $\boldsymbol{x^n=a}$**의 근** $\boldsymbol{x}$

실수 a의 실수인 n제곱근

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	양수 $\sqrt[n]{a}$, 음수 $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	양수 $\sqrt[n]{a}$	0	음수 $\sqrt[n]{a}$

PLUS α
$n=2$일 때, 간단히 $\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$로 나타낸다.
복소수 범위에서 실수 a의 n제곱근은 n개이다.

연구 1 $a>0$일 때, $-a$의 제곱근은 허수단위 i를 이용하여 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$로 나타낸다. 그러나 4 이상의 짝수 n에 대하여 $\sqrt[n]{-a}$는 정의하지 않는다.

연구 2 n이 홀수일 때, $(-x)^n=-x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이고, 제1사분면과 제3사분면을 지난다.
따라서 다음이 성립한다.
(ⅰ) $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$
(ⅱ) $\sqrt[n]{a}$와 a의 부호는 서로 같다.

$y=x^n$, a, $\sqrt[n]{-a}$, O, $\sqrt[n]{a}$, $-a$

개념 확인
다음 거듭제곱근을 모두 구하여라.
(1) -8의 세제곱근 (2) 16의 네제곱근

풀이 (1) -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$
$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$
(2) 16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$
$x^4-16=0$, $(x^2-4)(x^2+4)=0$
$(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

개념 정리

개념에 대한 설명 및 공식, 성질 등을 실례를 들어 구체적으로 자세히 설명하여 쉽고 정확하게 이해할 수 있도록 하였습니다.
또한, 개념 설명과 필수개념이 마주보고 있어 효과적으로 학습할 수 있도록 하였습니다.

필수개념 개념을 한눈에 확인할 수 있도록 정리

PLUS α 개념 이해에 도움이 되는 용어 및 간단한 공식 정리

연구 학습 내용 중 확장, 심화, 통합할 수 있는 내용을 정리

개념 확인 학습한 내용을 바로 확인할 수 있는 문제

필수문제 | 1 **거듭제곱근의 뜻**

▶Link P. 13 필수개념

다음 중 옳지 않은 것은?

① $-\sqrt[4]{3}$은 3의 네제곱근이다.
② 2의 세제곱근은 $\sqrt[3]{2}$이다.
③ -1은 -1의 세제곱근이다.
④ 0의 네제곱근은 0이다.
⑤ $-\sqrt[3]{4}$는 -4의 세제곱근이다.

풀이

① $-\sqrt[4]{3}$은 3의 음수인 네제곱근이다. (참)
② 복소수 범위에서 2의 세제곱근은 3개이다. (거짓)
③ $(-1)^3=-1$이므로 -1은 -1의 세제곱근이다. (참)
④ 0의 네제곱근은 0뿐이다. (참)
⑤ $-\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{-4}$이므로 $-\sqrt[3]{4}$는 -4의 실수인 세제곱근이다. (참)

답 ②

필수 문제

실전에 자주 출제되는 문제들을 엄선하여 해결 과정을 제시함으로써
해당 유형에 대한 이해를 확실히 할 수 있도록 하였습니다.

노트 필기

꼭 알아야 할 개념들을 되짚어 주어 실전에 활용할 수 있도록 하였습니다.

유제

필수문제와 유사한 문제로
유형에 대해 반복 학습을 할
수 있도록 제시하였습니다.

노트 필기

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여

a의 n제곱근 $x \Longleftrightarrow$ 방정식 $x^n=a$의 근 x

유제 1-1

정답 및 해설 P 2

거듭제곱근에 대한 **〈보기〉**의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 세제곱근 -2는 실수이다.
ㄴ. 16의 네제곱근 중 실수인 것은 2이다.
ㄷ. -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

연습 문제

중단원별로 학습한 내용을 난이도별(개념, 실력, 심화)로 구성하여 연산 능력 및 통합적 사고력을 향상시킬 수 있도록 하였습니다.

연 습 문 제

실력 완성

06 2 이상의 자연수 n에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 복소수 범위에서 실수 a의 n제곱근은 n개이다.
ㄴ. n이 짝수일 때, $a>0$이면 a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$이다.
ㄷ. n이 홀수일 때, $a<0$이면 a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$이고 $\sqrt[n]{a}<0$이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 2 이상의 자연수 n에 대하여 3의 n제곱근 중 하나를 a라 할 때, $\frac{a^n-1}{a^n+1}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

특강

교과서에는 자세히 다루지는 않지만 실전에 꼭 필요한 개념들을 별도로 모아 학생들의 실력을 한 단계 더 업그레이드 할 수 있도록 하였습니다.

Topic

특강에서 학습한 개념을 요약 정리하였고 문제를 통해 이해를 극대화할 수 있도록 하였습니다.

특강 PRINCIPLES OF MATH

상용로그의 성질

234, 23.4, 2.34, 0.234, 0.0234와 같이 숫자의 배열이 같고, 소수점의 위치만 다른 수

$N=2.34\times10^n$ (단, n은 정수)

에 대하여 $\log N$의 정수 부분과 소수 부분을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단, $\log 2.34=0.3692$)

N	$\log N$의 값	$\log N$의 정수 부분	$\log N$의 소수 부분
$234=2.34\times10^2$	$2+\log 2.34=2+0.3692$	2	0.3692
$23.4=2.34\times10^1$	$1+\log 2.34=1+0.3692$	1	0.3692
$2.34=2.34\times10^0$	$0+\log 2.34=0+0.3692$	0	0.3692
$0.234=2.34\times10^{-1}$	$-1+\log 2.34=-1+0.3692$	-1	0.3692
$0.0234=2.34\times10^{-2}$	$-2+\log 2.34=-2+0.3692$	-2	0.3692

위의 표에서 N의 소수점의 위치에 따라 $\log N$의 정수 부분이 결정되고, $\log N$의 소수 부분은 모두 0.3692로 동일함을 알 수 있다.

역으로 양수 N에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$2\le\log N<3 \iff 100\le N<1000 \longrightarrow$ N의 정수 부분이 3자리
$1\le\log N<2 \iff 10\le N<100 \longrightarrow$ N의 정수 부분이 2자리
$0\le\log N<1 \iff 1\le N<10 \longrightarrow$ N의 정수 부분이 1자리
$-1\le\log N<0 \iff 0.1\le N<1 \longrightarrow N=0.\times\times\times$
$-2\le\log N<-1 \iff 0.01\le N<0.1 \longrightarrow N=0.0\times\times\times$

Topic 1 상용로그의 성질 정답 및 해설 P 51

양수 N에 대하여 $\log N=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면

(1) $n\ge0$일 때, N은 정수 부분이 $(n+1)$자리인 수이다.
(2) $n<0$일 때, N은 소수점 아래 $-n$번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
(3) 서로 다른 두 양수 X, Y에 대하여 $\log X$, $\log Y$의 소수 부분이 같으면 두 수 X, Y는 숫자의 배열은 같고 소수점의 위치만 다르다.

Topic 1-1 $\left(\frac{3}{10}\right)^{10}$은 소수점 아래 n번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. 자연수 n의 값을 구하여라. (단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

Topic 1-2 $10<x<100$인 x에 대하여 $\log x$의 소수 부분과 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분이 서로 같을 때, x^2의 값을 구하여라.

이 책의 차례

Ⅲ 수열

부 록

특강

Ⅰ 지수함수와 로그함수

01 지수

같은 수를 여러 번 곱할 때, 곱하는 수와 곱해진 개수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$3\times3=3^2$ ← 3의 제곱

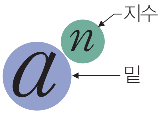
$3\times3\times3=3^3$ ← 3의 3제곱

$3\times3\times3\times3=3^4$ ← 3의 4제곱

……

일반적으로 임의의 수 a와 자연수 n에 대하여 a를 n번 거듭하여 곱한 것을 ***a*의 *n*제곱**이라 하고, 기호로 $\boldsymbol{a^n}$과 같이 나타낸다. 즉,

$$a^2=a\times a,\ a^3=a\times a\times a,\ a^4=a\times a\times a\times a,\ \cdots$$



이다. 이때 a^2, a^3, a^4, $\cdots$, a^n, $\cdots$ 을 통틀어 ***a*의 거듭제곱**이라 하고 a^n에서 $\boldsymbol{a}$를 거듭제곱의 밑, $\boldsymbol{n}$을 거듭제곱의 지수라 한다.

또한, 지수는 곱하는 횟수를 나타내므로 다음과 같은 거듭제곱의 계산이 가능하다. (단, $a\neq0$)

$$a^2\times a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)=a^5$$

$$(a^2)^3=(a\times a)\times(a\times a)\times(a\times a)=a^6$$

$$a^5\div a^3=\frac{a\times a\times a\times a\times a}{a\times a\times a}=a^2$$

$$a^3\div a^5=\frac{a\times a\times a}{a\times a\times a\times a\times a}=\frac{1}{a^2}$$

이와 같이 임의의 수 a, b와 자연수 m, n에 대하여 다음의 지수법칙이 성립한다.

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$

(3) $(ab)^n=a^nb^n$

(4) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n=\dfrac{b^n}{a^n}$ (단, $a\neq0$)

(5) $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ (단, $a\neq0$)

1 거듭제곱근

1. 거듭제곱근

2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉

방정식 $x^n=a$의 근 x를 $\boldsymbol{a}$**의** $\boldsymbol{n}$**제곱근**

이라 하고, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, $\cdots$ 을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.

a는 x의 n제곱

$$x^n=a$$

x는 a의 n제곱근

예를 들어, 1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로

$$x=1 \text{ 또는 } x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ 또는 } x=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

이다. 따라서 복소수 범위에서 1의 세제곱근은 3개이다.

한편, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

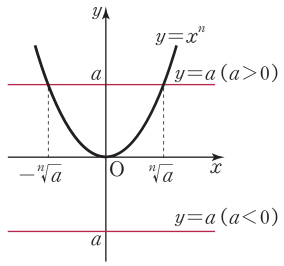
(1) $\boldsymbol{n}$**이 짝수일 때,**

임의의 실수 x에 대하여 $x^n\geq 0$이고, $(-x)^n=x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(i) $a>0$이면 a의 실수인 n제곱근은 양수와 음수 각각 한 개씩이다. 이때 양수인 것을 $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$, 음수인 것을 $\boldsymbol{-\sqrt[n]{a}}$로 나타낸다.

(ii) $a=0$이면 a의 n제곱근은 0뿐이다. 즉, $\sqrt[n]{0}=0$이다.

(iii) $a<0$이면 a의 실수인 n제곱근은 없다.

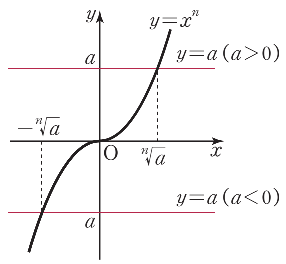


(2) $\boldsymbol{n}$**이 홀수일 때,**

임의의 실수 x에 대하여 $(-x)^n=-x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(i) 실수 a의 부호에 관계없이 a의 실수인 n제곱근은 한 개이다. 이때 이것을 $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$로 나타낸다.

(ii) $a>0$이면 $\sqrt[n]{a}>0$, $a<0$이면 $\sqrt[n]{a}<0$이다.



$\sqrt[n]{a}$를 'n제곱근 a'로 읽는다.

필수개념 거듭제곱근

거듭제곱근

2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수를 a의 n제곱근이라 한다.

a의 n제곱근 x $\Longleftrightarrow$ 방정식 $x^n=a$의 근 x

실수 a의 실수인 n제곱근

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	양수 $\sqrt[n]{a}$, 음수 $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	양수 $\sqrt[n]{a}$	0	음수 $\sqrt[n]{a}$

PLUS α

$n=2$일 때, 간단히 $\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$로 나타낸다.

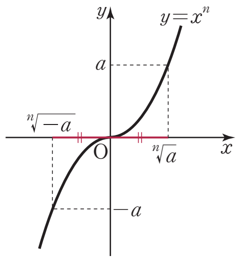
복소수 범위에서 실수 a의 n제곱근은 n개이다.

연구 1 $a>0$일 때, $-a$의 제곱근은 허수단위 i를 이용하여 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$로 나타낸다. 그러나 4 이상의 짝수 n에 대하여 $\sqrt[n]{-a}$는 정의하지 않는다.

연구 2 n이 홀수일 때, $(-x)^n=-x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이고, 제1사분면과 제3사분면을 지난다.
따라서 다음이 성립한다.

(i) $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$

(ii) $\sqrt[n]{a}$와 a의 부호는 서로 같다.



개념 확인

다음 거듭제곱근을 모두 구하여라.

(1) -8의 세제곱근 (2) 16의 네제곱근

풀이 (1) -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$

$x^3+8=0,\ (x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

(2) 16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$

$x^4-16=0,\ (x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

$\therefore\ x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

2. 거듭제곱근의 성질

2의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{2}$이고, 3의 네제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[4]{3}$으로 나타낸다. 따라서

$$(\sqrt[3]{2})^3=2,\ (\sqrt[4]{3})^4=3$$

이다. 또한, 8의 세제곱근 중 실수인 것은 2이고, 81의 네제곱근 중 양수인 것은 3이므로

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2,\ \sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$$

이다. 이와 같이 $a>0$일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a$$

이 성질을 이용하여 거듭제곱근의 여러 가지 성질에 대하여 알아보자.

(1) $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$$

이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이다. 따라서

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

가 성립한다. 또한, 이와 같은 방법으로 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

(2) $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$$

이므로 $(\sqrt[n]{a})^m$은 양수 a^m의 양의 n제곱근이다. 따라서

$$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$$

이 성립한다. 또한, 이와 같은 방법으로 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

필수개념 거듭제곱근의 성질

두 양수 a, b와 2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (2) $\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$

(3) $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ (4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

PLUS α

$a>0$일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$

연구 1 양수 a와 2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, $\sqrt[n]{a^n}=a$이므로 다음이 성립한다.

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{\sqrt[p]{(a^m)^p}}=\sqrt[n]{a^m} \text{ (단, } p\text{는 자연수)}$$

연구 2 n이 4 이상의 짝수일 때, $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$가 성립하기 위해서는 반드시 $a>0$, $b>0$이어야 한다.
그러나 n이 홀수일 때는 a와 b의 부호에 관계없이 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$가 성립한다.
예를 들어, n이 홀수일 때, $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-2}\sqrt[3]{-4}&=(-\sqrt[3]{2})(-\sqrt[3]{4})\\&=\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}\\&=\sqrt[3]{8}=2\end{aligned}$$

연구 3 $a>0$, $b>0$일 때,

$a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$, $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

이다. 이와 같은 원리로 $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \iff a<b} \text{ (단, } a>0,\ b>0)$$

개념 확인

세 수 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$의 대소를 비교하여라.

풀이 $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$

$6<8<9$이므로 $\sqrt[6]{6}<\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}$

$\therefore \sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

2 지수의 확장과 지수법칙

a의 거듭제곱 a^n에서 지수 n이 자연수일 때 성립하는 지수법칙이 지수가 0 또는 음의 정수인 경우에도 성립하도록 지수의 범위를 확장해 보자.

$a \neq 0$이고 $m=0$ 또는 $m=-n$ (n은 자연수)일 때, 지수법칙

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

이 성립한다고 하면

$$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n \text{이므로 } a^0 = 1,$$

$$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \text{이므로 } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

이어야 한다.

따라서 지수가 0 또는 음의 정수인 경우에는 다음과 같이 정의한다.

$$a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (단, } a \neq 0,\ n\text{은 자연수)}$$

이번에는 지수법칙이 지수가 유리수인 경우에도 성립하도록 지수의 범위를 확장해 보자.

$a > 0$이고 지수 x, y가 유리수일 때, 지수법칙

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

이 성립한다고 하면 유리수 $\frac{m}{n}$ (m은 정수, n은 2 이상의 자연수)에 대하여

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$$

이므로 거듭제곱근의 정의에 의하여 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 n제곱근이다.

따라서 지수가 유리수인 경우에는 다음과 같이 정의한다.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (단, } a > 0,\ m\text{은 정수, } n\text{은 2 이상의 자연수)}$$

특히, $m=1$일 때 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$이다.